Potenzen von VR

17.24 Def.: (vgl. Def. 10.7) Eine multilineare Abbildung
$$f: V \times V \times \ldots \times V \longrightarrow W$$
ist …

…symmetrisch, wenn für beliebige $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $\sigma \in S_n$ gilt:
$$f(v_1, \ldots, v_n) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)});$$

…schiefsymmetrisch, wenn für beliebige $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $\sigma \in S_n$ gilt: Def. 2.29
$$f(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)});$$

…alternierend, wenn gilt
$$f(v_1, \ldots, v_n) = 0 \quad \text{sobald } v_i = v_j \text{ für ein Paar } (i,j) \text{ mit } i \neq j.$$

17.25 Notiz: (vgl. Notiz 10.8)

alternierend $\Longrightarrow$ schiefsymmetrisch,

alternierend $\Longleftrightarrow$ schiefsymmetrisch falls $1+1 \neq 0$ in K

17.26 Lemma: Es reicht, benachbarte Einträge zu betrachten:

f symmetrisch $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$
$$f(\ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots) = f(\ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots)$$

f schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$:
$$f(\ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots) = -f(\ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots)$$

f alternierend $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$:
$$\big(f(\ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots) = 0 \quad \text{sobald } v_i = v_{i+1}\big)$$

Beweis:

($\Rightarrow$) jeweils klar

($\Leftarrow$) folgt für (schief)symmetrisch daraus, dass Transpositionen $(i\ i{+}1)$ die symmetrische Gruppe S_n erzeugen.

($\Leftarrow$) im alternierenden Fall:

Erfüllt f die angegebene Bedingung, so folgt analog zu Notiz 17.25:

$$f(\ldots, \underline{v}_i, \underline{v}_{i+1}, \ldots) = -f(\ldots, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_i, \ldots),$$

also ist f schiefsymmetrisch.

Sei nun $\underline{v}_i = \underline{v}_j$ für ein Paar (i,j) mit $i<j$.

Dann ist

gleich & benachbart

$$\begin{aligned} f(\ldots, \underline{v}_i, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_j, \ldots) &= \operatorname{sgn}(i{+}1\ j) \cdot f(\ldots, \underline{v}_i, \underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_{i+1}, \ldots) \\ &= (-1) \cdot \underline{0} \\ &= \underline{0} \end{aligned}$$

$\square$

17.27 Notiz: Sei $f: V \times V \times \ldots \times V \longrightarrow W$ multilinear, und $f_\otimes: V \otimes V \otimes \ldots \otimes V \longrightarrow W$ die induzierte lineare Abbildung. Es gilt:

f symmetrisch

oder nur $\sigma \in \{(i\ i{+}1)\}$

$$\Longleftrightarrow \ker f_\otimes \supseteq \langle \underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_n - \underline{v}_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \underline{v}_{\sigma(n)} \mid \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V,\ \sigma \in S_n \rangle$$

f schiefsymmetrisch

oder nur $\sigma \in \{(i\ i{+}1)\}$

$$\Longleftrightarrow \ker f_\otimes \supseteq \langle \underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_n - \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \underline{v}_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \underline{v}_{\sigma(n)} \mid \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V,\ \sigma \in S_n \rangle$$

f alternierend

$$\Longleftrightarrow \ker f_\otimes \supseteq \langle \underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_n \mid \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V \text{ mit } \underline{v}_i = \underline{v}_{i+1} \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, n-1\} \rangle$$

17.28 Satz: Zu einem K-VR V und einer Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ existiert ein K-VR $S^k V$ zusammen mit einer Abbildung (von Mengen)

$$\mathrm{can}_S : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \longrightarrow S^k V,$$

die folgende UE erfüllt:

can ist K-multilinear und symmetrisch, und für jeden K-VR T und jede K-multilineare symmetrische Abbildung $t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \longrightarrow T$ existiert genau eine lineare Abbildung t_S mit $t = t_S \circ \mathrm{can}_S$.

$$\begin{tikzcd}
V \times \ldots \times V \arrow[rr, "\text{multitsymm.}", "\mathrm{can}_S"'] \arrow[dr, "\text{multitsymm.}", "\forall t"'] & & S^k V \arrow[dl, "\text{linear}"', "\exists ! t_S"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Genauso existiert ein K-VR $\Lambda^k V$ zusammen mit einer Abbildung (von Mengen)

$$\mathrm{can}_\Lambda : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \longrightarrow \Lambda^k V,$$

die folgende UE erfüllt:

can ist K-multilinear und alternierend, und für jeden K-VR T und jede K-multilineare alternierende Abbildung $t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \longrightarrow T$ existiert genau eine lineare Abbildung t_Λ mit $t = t_\Lambda \circ \mathrm{can}_\Lambda$.

17.29 Def.:

$V^{\otimes k} := V \otimes \ldots \otimes V$ k-te Tensorpotenz von V

$S^k V$ k-te symmetrische Potenz von V

$\Lambda^k V$ k-te äußere Potenz von V

Beweis zu 17.28:

Definiere $\quad S^k V := {}^{V^{\otimes k}}\!/_{\mathrm{Sym}}\,,$

$\quad\quad\quad\quad \Lambda^k V := {}^{V^{\otimes k}}\!/_{\mathrm{Alt}}\,,$

wobei $\mathrm{Sym} := \langle \underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_k - \underline{v}_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \underline{v}_{\sigma(k)} \rangle$

und $\quad \mathrm{Alt} := \langle \underline{v}_1 \otimes \ldots \underline{v}_k \mid \underline{v}_i = \underline{v}_j$ für ein $i \neq j \rangle$

die Untervektorräume aus Notiz 17.26 sind.

Definiere can_S und $\mathrm{can}_\wedge$ als die Kompositionen

$$\mathrm{can}_S : V \times \ldots \times V \xrightarrow{\mathrm{can}} V^{\otimes k} \overset{\pi_S}{\twoheadrightarrow} S^k V$$

$$\mathrm{can}_\wedge : V \times \ldots \times V \xrightarrow{\mathrm{can}} V^{\otimes k} \overset{\pi_\wedge}{\twoheadrightarrow} \Lambda^k V,$$

wobei π_S und $\pi_\wedge$ die kanonischen Quotientenabb. sind.

Offenbar sind can_S und $\mathrm{can}_\wedge$ multilinear und symmetrisch bzw. alternierend.

(Direkte Rechnung oder Notiz 17.26 für $\pi_S = (\pi_S \circ \mathrm{can})_\otimes$, $\pi_\wedge = (\pi_\wedge \circ \mathrm{can})_\otimes$.)

UE von can_S:

Sei $t: V \times \ldots \times V$ multilinear und symmetrisch. Wegen der UE von $V^{\otimes k}$ existiert genau eine lineare Abbildung $t_\otimes : V^{\otimes k} \longrightarrow T$ mit $t = t_\otimes \circ \mathrm{can}$. Nach Notiz 17.26 ist $\mathrm{Sym} \subseteq \ker t_\otimes$. Also existiert nach der UE des Quotienten (Beispiel 17.4) genau eine lineare Abbildung $t_S : S^k V \longrightarrow T$ mit $t_\otimes = t_S \circ \pi_S$.

$$\begin{tikzcd}
V \times \ldots \times V \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{can}_S"] \arrow[dr, "t"'] & V^{\otimes k} \arrow[r, "\pi_S"] \arrow[d, "t_\otimes"] & S^n V \arrow[dl, "t_S"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

UE von $\mathrm{can}_\wedge$: analog. $\square$

17.30 Spezialfälle:

$$V^{\otimes 0} = K \quad \text{mit} \quad \mathrm{can}\colon \{\underline{0}\} \longrightarrow K, \quad \underline{0} \longmapsto 1$$

$$S^0 V = K \quad \text{analog}$$

$$\Lambda^0 V = K \quad \text{analog}$$

(Prüfe jeweils UE. Ein Produkt aus 0 Faktoren $\prod_{\emptyset} V$ ist der Nullraum $\{\underline{0}\}$, und eine multilineare Abbildung $\prod_{\emptyset} V \xrightarrow{t} T$ ist eine Abbildung von Mengen $\{\underline{0}\} \xrightarrow{t} T$. Solch eine Abbildung ist durch einen Vektor $t(\underline{0}) \in T$ festgelegt, und entspricht genau einer linearen Abbildung $K \xrightarrow{t} T$, $1 \longmapsto t(\underline{0})$.)

17.31 Notation:

$\underline{v}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{v}_k$ (oder $\underline{v}_1 \vee \ldots \vee \underline{v}_k$) für $\mathrm{can}_S(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) \in S^k V$

$\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_k$ für $\mathrm{can}_\Lambda(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) \in \Lambda^k V$

17.32 Notiz: Für $\underline{v}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{v}_k$ und $\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_k$ gelten dieselben Rechenregeln wie für reine Tensoren $\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_k$ (Notiz 17.11). Darüber hinaus gilt:

$$\left.\begin{aligned} \underline{v}_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \underline{v}_{\sigma(k)} &= \underline{v}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{v}_k \\ \underline{v}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \underline{v}_{\sigma(k)} &= \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_k \end{aligned}\right\} \forall \sigma \in S_k$$

$$\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_k = \underline{0} \quad \text{falls } \underline{v}_i = \underline{v}_j \text{ für ein } i \neq j.$$

17.33 Satz:

Für beliebige K-VR V und W haben wir kanonische Isomorphismen

$$S^k(V \oplus W) \xleftarrow{\cong} \bigoplus_{j=0}^k S^j(V) \otimes S^{k-j}(W)$$

mit $\underline{v}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{v}_j \cdot \underline{w}_{j+1} \cdot \ldots \cdot \underline{w}_k \longleftarrow\!\shortmid (\underline{v}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{v}_j) \otimes (\underline{w}_{j+1} \cdot \ldots \cdot \underline{w}_k)$

und
$$\Lambda^k(V \oplus W) \xleftarrow{\cong} \bigoplus_{j=0}^k \Lambda^j(V) \otimes \Lambda^{k-j}(W)$$

mit $\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j \wedge \underline{w}_{j+1} \wedge \ldots \wedge \underline{w}_k \longleftarrow\!\shortmid (\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j) \otimes (\underline{w}_{j+1} \wedge \ldots \wedge \underline{w}_k)$

Beweis:

(Hier nur für Λ, für S ähnlich)

Die Abbildungen
$$\Lambda^k(V \oplus W) \longleftarrow V^j \times W^{k-j}$$
$$\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j \wedge \underline{w}_{j+1} \wedge \ldots \wedge \underline{w}_k \longleftarrow\!\shortmid (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_j, \underline{w}_{j+1}, \ldots, \underline{w}_k)$$
sind multilinear und haben sowohl Tupel im Kern, für die gilt $\underline{v}_i = \underline{v}_{i'}$ für ein Paar (i,i') mit $i \neq i'$ als auch solche mit $\underline{w}_i = \underline{w}_{i'}$ für ein Paar (i,i') mit $i \neq i'$!

Es folgt [...], dass sie lineare Abb.
$$\Lambda^k(V \oplus W) \xleftarrow{B_j} \Lambda^j V \otimes \Lambda^{k-j} W$$
mit $\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j \wedge \underline{w}_{j+1} \wedge \ldots \wedge \underline{w}_k \longleftarrow\!\shortmid (\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_j) \otimes (\underline{w}_{j+1} \wedge \ldots \wedge \underline{w}_k)$

(Detaillierte Konstruktion wie Konstruktion von t' im Beweis zu Satz 17.12 (A).)

Durch
$$\Lambda^k(V \oplus W) \xleftarrow{B} \bigoplus_{j=0}^k \Lambda^j V \otimes \Lambda^{k-j} W$$
$$\textstyle\sum_j B_j(\underline{x}_j) \longleftarrow\!\shortmid (\underline{x}_j)_j$$
ist also eine lineare Abbildung wie im Satz definiert.

Definiere Abbildung in umgekehrte Richtung wie folgt.

Für $j \in \{1,\dots,k\}$ sei

$$S_n^j := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(j) \text{ und } \sigma(j+1) < \sigma(j+2) < \dots < \sigma(k)\}$$

(Ein $\sigma \in S_n^j$ entspricht einer Wahl von Indizes $1 \le i_1 < \dots < i_j \le k$, nämlich der Wahl $1 \le \sigma(1) < \dots < \sigma(j) \le k$.)

Die Abbildung

$$(V \oplus W)^k \longrightarrow \Lambda^j V \otimes \Lambda^{k-j} W$$

$$\left(\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{w}_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \underline{v}_k \\ \underline{w}_k \end{pmatrix} \right) \longmapsto \sum_{\sigma \in S_k^j} \operatorname{sgn} \sigma \cdot (\underline{v}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \underline{v}_{\sigma(j)}) \otimes (\underline{w}_{\sigma(j+1)} \wedge \dots \wedge \underline{w}_{\sigma(k)})$$

multilinear [...] und auch alternierend:

Sei $\begin{pmatrix} \underline{v}_i \\ \underline{w}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{v}_{i+1} \\ \underline{w}_{i+1} \end{pmatrix}$ für ein $i \in \{1,\dots,k-1\}$

Falls $\{i, i+1\} \subseteq \sigma^{-1}\{1,\dots,j\}$, ist $v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(j)} = 0$, also verschwindet der entsprechende Summand.

Falls $\{i, i+1\} \subseteq \sigma^{-1}\{j+1,\dots,k\}$, ist $w_{\sigma(j+1)} \wedge \dots \wedge w_{\sigma(k)} = 0$. also verschwindet der entsprechende Summand.

Falls $i \in \sigma^{-1}\{1,\dots,j\}$ und $i+1 \in \sigma^{-1}\{j+1,\dots,k\}$, so ist auch $\sigma' := (i \;\; i+1) \circ \sigma \in S_k^j$.

(Beispiel:

$k = 7$, $j = 4$, $i = 3$, $\sigma = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$\sigma' = (3 \;\; 4)\sigma = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right)$)

Es ist jeweils $\underline{v}_{\sigma(x)} = \underline{v}_{\sigma'(x)}$ und $\underline{w}_{\sigma(x)} = \underline{w}_{\sigma'(x)}$ (für jedes $x \in \{1,\dots,k\}$), aber $\operatorname{sgn}(\sigma') = -\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Also heben der σ-Summand und der σ'-Summand sich auf.

Das alles gibt uns eine lineare Abbildung

$$\Lambda^k(V \oplus W) \xrightarrow{\alpha_j} \Lambda^j V \otimes \Lambda^{k-j} W$$

mit $\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{w}_1 \end{pmatrix} \wedge \dots \wedge \begin{pmatrix} \underline{v}_k \\ \underline{w}_k \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{\sigma \in S_k^j} \operatorname{sgn} \sigma \cdot (\underline{v}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \underline{v}_{\sigma(j)}) \otimes (\underline{w}_{\sigma(j+1)} \wedge \dots \wedge \underline{w}_{\sigma(k)})$

Definiere

$$\alpha : \Lambda^k(V \oplus W) \longrightarrow \bigoplus_{j=0}^{k} \left(\Lambda^j V \otimes \Lambda^{k-j} W \right).$$
$$\underline{x} \longmapsto (\alpha_j(\underline{x}))_j$$

Dass α & β inverse zueinander sind können wir auf Erzeugern prüfen.

$$\alpha \circ \beta(\underline{v}_1 \wedge \dots \wedge \underline{v}_j \otimes \underline{w}_{j+1} \wedge \dots \wedge \underline{w}_k) = \alpha\left(\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{0} \end{pmatrix} \wedge \dots \wedge \begin{pmatrix} \underline{v}_j \\ \underline{0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{w}_{j+1} \end{pmatrix} \wedge \dots \wedge \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{w}_k \end{pmatrix}\right)$$

$\alpha_{j'}(\dots) = \underline{0}$ für $j' \neq j$

$$= \alpha_j\left(\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{0} \end{pmatrix} \wedge \dots \wedge \begin{pmatrix} \underline{v}_j \\ \underline{0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{w}_{j+1} \end{pmatrix} \wedge \dots \wedge \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{w}_k \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underline{v}_1 \wedge \dots \wedge \underline{v}_j \otimes \underline{w}_{j+1} \wedge \dots \wedge \underline{w}_k$$

$\beta \circ \alpha = \mathrm{id}.$ (Vektoren der Form $\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{0} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \underline{v}_j \\ \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{w}_{j+1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{w}_k \end{pmatrix}$ erzeugen $\Lambda^k(V \oplus W)$.)

$\square$

17.34 Korollar:

Ist $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ Basis von V, so gilt für alle $k \geq 1$:

$\mathcal{B}_S := (\underline{b}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \underline{b}_{i_k})_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n}$ eine Basis von $S^k V$,

$\mathcal{B}_\wedge := (\underline{b}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \underline{b}_{i_k})_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ eine Basis von $\Lambda^k V$.

Insbesondere gilt (auch für $k=0$):

$$\dim S^k V = \binom{n+k-1}{k}$$

$$\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$$

Beweis:

Induktion über n.

IA: Für $n=1$ ist $V = \langle \underline{b} \rangle (\cong K)$ und $V^{\otimes k} = \langle \underline{b}^{\otimes k} \rangle (\cong K)$.

$$S^k V = \frac{V^{\otimes k}}{\langle a_1 \underline{b} \otimes \ldots \otimes a_k \underline{b} - a_{\sigma(1)} \underline{b} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(k)} \underline{b} \rangle}$$

gleich $(= \prod a_i \, \underline{b}^{\otimes k})$

$$= \langle \underline{b}^{\cdot k} \rangle \quad (\cong K)$$

$$\Lambda^k V = \begin{cases} V & \text{für } k=1 \\ \{\underline{0}\} & \text{für } k \geq 2 \quad (\text{denn } \underline{b} \otimes \underline{b} = \underline{0} \text{ in } \Lambda^k V). \end{cases}$$

IS:
$$S^k V = S^k(\langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{n-1} \rangle \oplus \langle \underline{b}_n \rangle)$$

$$\underset{17.33}{\cong} \bigoplus_{j=1}^{k} S^j(\langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{n-1} \rangle) \otimes S^{k-j}\langle \underline{b}_n \rangle$$

$$\underset{I.V.}{=} \bigoplus_{j=1}^{k} \langle \underline{b}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \underline{b}_{i_j} \rangle_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_j \leq n-1} \otimes \langle \underline{b}_n^{\cdot (k-j)} \rangle$$

Unter dem Isomorphismus aus 17.33 bildet die Basis

$$(\underline{b}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \underline{b}_{i_j} \otimes \underline{b}_n^{\cdot (k-j)})_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_j \leq n-1,\ 1 \leq j \leq n}$$

ab auf
$$(\underline{b}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \underline{b}_{i_j} \cdot \underline{b}_n^{\cdot (k-j)})_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_j \leq n-1,\ 1 \leq j \leq n}$$

$$= (\underline{b}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \underline{b}_{i_k})_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n}$$

$\Lambda^k V$ analog. $\square$

Beispiel: V 3-dimensional mit Basis $\underline{e}, \underline{f}, \underline{g}$:

	$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$		
S^3V:	$\underline{e}^3, \underline{e}^2\underline{f}, \underline{e}^2\underline{g}, \underline{e}\cdot\underline{f}^2, \underline{e}\cdot\underline{f}\cdot\underline{g}, \underline{f}^3, \underline{f}^2\underline{g}, \ldots$	Λ^3V:	$\underline{e}\wedge\underline{f}\wedge\underline{g}$
S^2V:	$\underline{e}^2, \underline{e}\cdot\underline{f}, \underline{e}\cdot\underline{g}, \underline{f}^2, \underline{f}\cdot\underline{g}, \underline{g}^2$	Λ^2V:	$\underline{e}\wedge\underline{f} \quad \underline{e}\wedge\underline{g} \quad \underline{f}\wedge\underline{g}$
S^1V:	$\underline{e} \quad \underline{f} \quad \underline{g}$	Λ^1V:	$\underline{e} \quad \underline{f} \quad \underline{g}$
S^0V:	1	Λ^0V:	1

17.35 Satz & Def.: Zu jeder K-linearen Abbildung

$$f\colon V \longrightarrow W$$

existieren für jedes $k \in \mathbb{N}$ K-lineare Abbildungen

$$f^{\otimes k}\colon V^{\otimes k} \longrightarrow W^{\otimes k}$$
mit $\underline{v}_1 \otimes \ldots \otimes \underline{v}_k \longmapsto f(\underline{v}_1) \otimes \ldots \otimes f(\underline{v}_k)$

$$S^k f\colon S^k V \longrightarrow S^k W$$
mit $\underline{v}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{v}_k \longmapsto f(\underline{v}_1) \cdot \ldots \cdot f(\underline{v}_k)$

$$\Lambda^k f\colon \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^k W$$
mit $\underline{v}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{v}_k \longmapsto f(\underline{v}_1) \wedge \ldots \wedge f(\underline{v}_k)$

– die k-te Tensor-/symmetrische/äußere Potenz von f.

Beweis: $f^{\otimes k} = f \otimes \ldots \otimes f$ — Spezialfall von 17.17.

$S^k f$, $\Lambda^k f$ ähnlich $\square$

17.36 Notiz: Für K-lineare Abbildungen $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} X$ ist

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^{\otimes k} &= g^{\otimes k} \circ f^{\otimes k}, \\
S^k(g \circ f) &= S^k g \circ S^k f, \\
\Lambda^k(g \circ f) &= \Lambda^k g \circ \Lambda^k f.
\end{aligned}$$

Ferner ist
$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_V)^{\otimes k} &= \mathrm{id}_{V^{\otimes k}}, \\
S^k(\mathrm{id}_V) &= \mathrm{id}_{S^k V}, \\
\Lambda^k(\mathrm{id}_V) &= \mathrm{id}_{\Lambda^k V}.
\end{aligned}$$

Koordinatenfreie Sicht auf Determinante

Ist $\dim_K V = n$, so ist nach Korollar 17.34

$$\dim_K(\Lambda^n V) = \binom{n}{n} = 1.$$

Also ist $\Lambda^n V \cong K$. Wähle und fixiere einen solchen Isomorphismus $\omega : \Lambda^n V \xrightarrow{\cong} K$.

Ist nun $f \circlearrowright V$ ein Endomorphismus, so haben wir nach 17.35 auch einen induzierten Endomorphismus

$$\Lambda^n f \circlearrowright \Lambda^n V.$$

Betrachte die Komposition $\omega \circ \Lambda^n f \circ \omega^{-1}$:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n V \arrow[r, "\Lambda^n f"] \arrow[d, "\omega", "\cong"'] & \Lambda^n V \arrow[d, "\omega", "\cong"'] \\
K \arrow[r, dotted] & K
\end{tikzcd}$$

Die Komposition ist durch eine 1×1-Matrix gegeben, also durch Multiplikation mit einem Skalar $\in K$. Mit welchem?

17.37 Satz: Der gesuchte Skalar ist $\det(f) \in K$ – in obiger Situation kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n V \arrow[r, "\Lambda^n f"] \arrow[d, "\omega", "\cong"'] & \Lambda^n V \arrow[d, "\omega", "\cong"'] \\
K \arrow[r, "\cdot \det(f)"'] & K
\end{tikzcd}$$

Beweis:

Wähle Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V. Dann ist

$$\mathcal{B}_\wedge = (b_\wedge) \quad \text{mit } b_\wedge := b_1 \wedge \dots \wedge b_n$$

eine Basis von $\Lambda^n V$, und ω ist bestimmt durch

$\omega(\underline{b}_\wedge) = a \in K$ für ein $a \in K^*$.

Sei $M = {}_B M_B(f) = (m_{ij})$ Darstellungsmatrix von f. Dann ist

$$f(\underline{b}_i) = \sum_j m_{ji} \underline{b}_j,$$

$$\Lambda^n f(\underline{b}_\wedge) = \sum_{j_1} m_{j_1 1} \underline{b}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \sum_{j_n} m_{j_n n} \underline{b}_{j_n}$$

$$= \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n \\ \in \{1,\ldots,n\}}} \prod_{i=1}^n m_{j_i i} \, \underline{b}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \underline{b}_{j_n}$$

$$= \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n \\ \in \{1,\ldots,n\}, \\ \text{alle } j_i \\ \text{verschieden}}} \prod_{i=1}^n m_{j_i i} \, \underline{b}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \underline{b}_{j_n} \quad \leftarrow \text{denn } \underline{b}_i \wedge \underline{b}_i = 0$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i) i} \, \underline{b}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \underline{b}_{\sigma(n)}$$

$$= \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i) i}} \, \underline{b}_\wedge$$

$$= \det(M^T) \cdot \underline{b}_\wedge$$

$$= \det(M) \cdot \underline{b}_\wedge$$

$$= \det(f) \cdot \underline{b}_\wedge.$$

Also ist

$$\omega \circ \Lambda^n f \circ \omega^{-1}(1) = \omega \circ \Lambda^n f(a^{-1} \cdot \underline{b}_\wedge)$$

$$= \omega(a^{-1} \cdot \det(f) \cdot \underline{b}_\wedge)$$

$$= a \cdot a^{-1} \cdot \det(f)$$

$$= \det(f).$$

□

- Satz 17.37 hätten wir auch als Definition von $\det(f)$ verwenden können.

Ringstruktur

17.38 Bemerkung:

Auf
$$T^\bullet V := \bigoplus_{k\geq 0} V^{\otimes k},$$
$$S^\bullet V := \bigoplus_{k\geq 0} S^k V,$$
$$\Lambda^\bullet V := \bigoplus \Lambda^k V$$
gibt es jeweils eine wohldefinierte Multiplikation mit
$$\underline{v}_1 \otimes \dots \otimes \underline{v}_k \cdot \underline{w}_1 \otimes \dots \otimes \underline{w}_\ell = \underline{v}_1 \otimes \dots \otimes \underline{v}_k \otimes \underline{w}_1 \otimes \dots \otimes \underline{w}_\ell$$
$$\underline{v}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{v}_k \cdot \underline{w}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{w}_\ell = \underline{v}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{v}_k \cdot \underline{w}_1 \cdot \ldots \cdot \underline{w}_\ell$$
$$\underline{v}_1 \wedge \dots \wedge \underline{v}_k \cdot \underline{w}_1 \wedge \dots \wedge \underline{w}_\ell = \underline{v}_1 \wedge \dots \wedge \underline{v}_k \wedge \underline{w}_1 \wedge \dots \wedge \underline{w}_\ell$$
Durch diese Multiplikation werden $T^\bullet V$, $S^\bullet V$ und $\Lambda^\bullet V$ zu Ringen (sogar zu „K-Algebren").

Beispiel:

$$S^\bullet(\underset{\underline{e}_i}{K^n}) \underset{\widehat{=}}{\cong} K[\underset{x_i}{x_1, \dots, x_n}] \quad \text{(Polynomring in } n \text{ Variablen)}$$

Die Ringe $T^\bullet V$ und $\Lambda^\bullet V$ sind nicht kommutativ.